放地研特別寄稿シリーズ SCS-0139

土壌空気中の ^{222}Rn 濃度の導き方［日本語版］*

How to derive the concentrations of ^{222}Rn in soil air [Japanese version]

片岡敏夫
気体分子運動論の部屋

Toshio Kataoka
Room for Kinetic Theory of Gases

E-mail: HQL06124@nifty.ne.jp

* 英語版：RESL Special Contribution Series SCS-0138

放射線地学研究所、名古屋 2021

読 者 の 皆 様 方 へ

この寄稿は、2014 年 6 月 23 日—27 日にスイスのジュネーブで開催された国際放射線防護学会の第 4 回ヨーロッパ会議及び 2018 年 6 月 4 日—8 日にオランダのハーグで開催されたその第 5 回ヨーロッパ会議で発表した土壌空気中の ^{222}Rn 濃度、即ち微分方程式の解の導き方を記述したものである。

この寄稿についてご意見やご質問等がおありになられる方は

―――――――――――――――――

気体分子運動論の部屋

片岡敏夫

e-mail: HQL06124@nifty.ne.jp

―――――――――――――――――

まで、ご連絡頂ければ幸いである。

2021 年 2 月

片岡敏夫

土壌空気中の ^{222}Rn 濃度、即ち Kataoka (2018)の(4)式及び(5)式 (それぞれ Kataoka and Kigoshi (2014)の(8)式及び(9)式と同じ)の導き方

図 1 に示されるようなウラン残渣(ウラン残渣は以後残渣と称する) 1 層及びその上を覆う単一の層(土壌 1 層)から成っている 1 つの系を考えてみましょう。その系は水平方向(x-及び y-方向)に一様であると仮定する。その残渣の層の厚さは、^{222}Rn の拡散の点から無限の深さと考えられる 15 m 以上あるものとする。土壌については、バルク乾燥密度、ポロジティー及び体積含水率のような性質が分かっており、また、放射能は通常の土壌と同程度のレベルであることが分かっているが、^{238}U、^{226}Ra、^{232}Th 及び ^{40}K の含有量並びに ^{222}Rn escape-to-production ratio は不明とする。

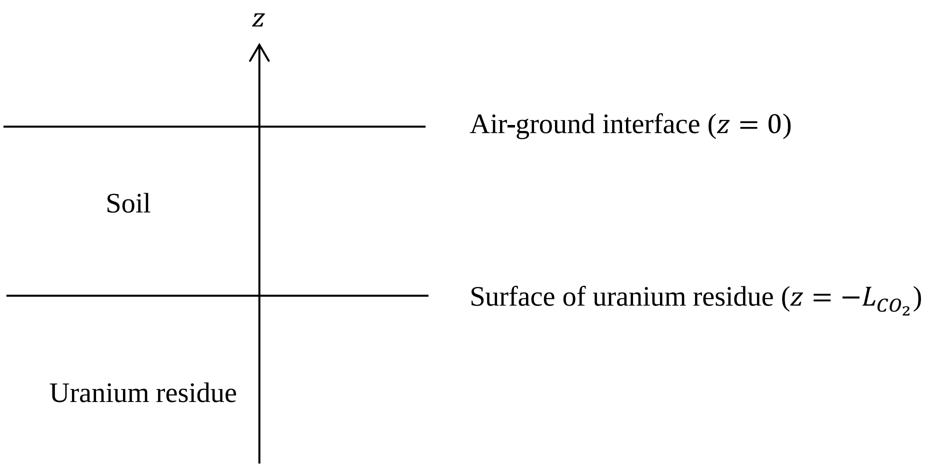

Figure 1. Single cover layer system on the surface of uranium residue.

土壌中には土壌微生物及び植物根が密に存在し、また、CO_2 の生成の高い領域では ^{222}Rn は CO_2 に随伴されると仮定する。従って、土壌空気中では ^{222}Rn は CO_2 に随伴される、即ち、^{222}Rn は CO_2 と同様に振舞うものとする。このことは土壌空気中においては ^{222}Rn の拡散係数の代わりに CO_2 の拡散係数が使用され得ることを意味するので、土壌中での ^{222}Rn の拡散輸送は Fick's first law：

$$F_{Rn,s} = -D^{CO_2} \frac{\partial (n_a C_{Rn,a})}{\partial z} \qquad (0 \geq z \geq -L_{CO_2}) \qquad (1)$$

により表される。ここで、

$F_{Rn,s}$：土壌中で幾何学的面積を横切る ^{222}Rn の流束密度 (atoms m^{-2} of soil s^{-1})

D^{CO_2}：土壌空気中における CO_2 の拡散係数($m^2\ s^{-1}$)
$C_{Rn,a}$：土壌空気中の ^{222}Rn 濃度(atoms $m^{-3}$of soil air)
z：地表面からの深さであり、下方向に負である(m)
L_{CO_2}：残渣を覆っている土壌層の厚さ(m)
n_a：土壌の全容積に対するその土壌の空気の容積の比で定義される土壌の空気率であり、土壌のポロジティをn、土壌の体積含水率をn_wとすると、$n_a = n - n_w$で表される。
である。

残渣中では土壌微生物及び植物根が密には存在しないと仮定すると、残渣中での ^{222}Rn の拡散輸送は、Fick's first law：

$$F_{Rn,r} = -D^{Rn,r}\frac{\partial(n_{a,r}C_{Rn,a,r})}{\partial z} \qquad (-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty) \tag{2}$$

により表される。ここで、
$F_{Rn,r}$：残渣中で幾何学的面積を横切る ^{222}Rn の流束密度 (atoms m^{-2} of residue s^{-1})
$D^{Rn,r}$：残渣空気(残渣中に含まれる空気)中における ^{222}Rn の拡散係数($m^2\ s^{-1}$)
$C_{Rn,a,r}$：残渣空気中の ^{222}Rn 濃度(atoms $m^{-3}$of residue air)
$n_{a,r}$：残渣の全容積に対するその残渣の空気の容積の比で定義される残渣の空気率であり、残渣のポロジティーをn_r、残渣の体積含水率を$n_{w,r}$とすると、$n_{a,r} = n_r - n_{w,r}$で表される。
である。

土壌空気中における CO_2 の拡散係数D^{CO_2}及び残渣空気中における ^{222}Rn の拡散係数$D^{Rn,r}$は、それぞれ

$$D^{CO_2} = \frac{D_0^{CO_2}}{k} \tag{3}$$

及び

$$D^{Rn,r} = \frac{D_0^{Rn}}{k_r} \tag{4}$$

で与えられる。ここで、
k及びk_r：それぞれ土壌及び残渣の tortuosity(くねり、屈曲度)
$D_0^{CO_2}$及びD_0^{Rn}：それぞれ空気中における CO_2 及び ^{222}Rn の分子拡散係数($m^2\ s^{-1}$)
である。

土壌空気中及び残渣空気中の ^{222}Rn 濃度の深さ及び時間変化は、それぞれ Fick's second law：

$$\frac{\partial(n_a C_{Rn,a})}{\partial t} = -\frac{\partial F_{Rn,s}}{\partial z} - \lambda(n_a C_{Rn,a}) + \varrho X \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{5}$$

及び

$$\frac{\partial(n_{a,r} C_{Rn,a,r})}{\partial t} = -\frac{\partial F_{Rn,r}}{\partial z} - \lambda(n_{a,r} C_{Rn,a,r}) + \delta_r \varrho_r A_{Ra,r} \qquad \left(-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty\right) \tag{6}$$

で与えられる。ここで、

λ：^{222}Rn の崩壊定数(s^{-1})

ϱ 及びϱ_r：それぞれ土壌及び残渣の乾燥密度(kg m^{-3})

X：土壌中で発生し土壌空気中に逃れ出る ^{222}Rn の量(atoms kg^{-1} of dry soil s^{-1})であり、その量は未知とする。

δ_r：残渣中で平衡状態で生成された ^{222}Rn の量に対する空気で満たされた間隙に逃れ出てきた ^{222}Rn の量の比で定義される残渣の ^{222}Rn escape-to-production ratio

$A_{Ra,r}$：残渣の固体中の ^{226}Ra 濃度(Bq kg^{-1} of dry residue)

である。

(1)式及び(3)式を(5)式に代入しn_a及びkを一定と仮定し、また、 (2)式及び(4)式を(6)式に代入し$n_{a,r}$及びk_rを一定と仮定すると、それぞれ

$$\frac{\partial C_{Rn,a}}{\partial t} = \frac{D_0^{CO_2}}{k}\frac{\partial^2 C_{Rn,a}}{\partial z^2} - \lambda C_{Rn,a} + \frac{\varrho X}{n_a} \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{7}$$

及び

$$\frac{\partial C_{Rn,a,r}}{\partial t} = \frac{D_0^{Rn}}{k_r}\frac{\partial^2 C_{Rn,a,r}}{\partial z^2} - \lambda C_{Rn,a,r} + \frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{n_{a,r}} \qquad \left(-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty\right) \tag{8}$$

が得られる。

まず、定常状態、即ち$\frac{\partial C_{Rn,a,r}}{\partial t} = 0$を仮定し、$C_{Rn,a,r}(z = -\infty) = \frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}$の境界条件で(8)式を解くと、

$$C_{Rn,a,r} = A\exp\left(\sqrt{\frac{k_r \lambda}{D_0^{Rn}}}z\right) + \frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} \qquad \left(-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty\right) \tag{9}$$

が得られる。ここで、A は決定さるべき定数である。(4)式及び(9)式を(2)式に代入すると、

$$F_{Rn,r} = -n_{a,r}\sqrt{\frac{D_0^{Rn}\lambda}{k_r}}\mathrm{A}\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right) \qquad \left(-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty\right) \tag{10}$$

が得られる。

次に、定常状態、即ち $\frac{\partial C_{Rn,a}}{\partial t} = 0$ を仮定し(7)式を解くと、

$$C_{Rn,a} = B\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) + C\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) + D \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{11}$$

が得られる。ここで、B、C 及び D は決定さるべき定数であり、$D = \frac{\varrho X}{\lambda n_a}$である。地表面では $z = 0$ なので、(11)式から

$$C_{Rn,a,0} = B + C + D \tag{12}$$

が得られる。ここで、$C_{Rn,a,0}$ (atoms m^{-3} of soil air) は地表面での土壌空気中の ^{222}Rn 濃度であり地表面での大気中の ^{222}Rn 濃度に等しい。 (12)式を書き直すと、

$$D = C_{Rn,a,0} - B - C \tag{13}$$

が得られる。(13)式の(11)式への代入は、

$$C_{Rn,a} = B\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 1\right\} + C\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 1\right\} + C_{Rn,a,0} \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{14}$$

を与える。 (3)式及び(14)式の(1)式への代入は、

$$F_{Rn,s} = -n_a\sqrt{\frac{D_0^{CO_2}\lambda}{k}}\left\{B\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - C\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\right\} \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{15}$$

を与える。地表面では $z = 0$ なので、(15)式から

$$F_{Rn,s,0} = n_a \sqrt{\frac{D_0^{CO_2}\lambda}{k}}(C - B) \tag{16}$$

が得られる。ここで、

$F_{Rn,s,0}$：地表面で幾何学的面積を横切る ^{222}Rn の流束密度 (atoms m^{-2} of soil s^{-1})、即ち ^{222}Rn の散逸率

である。(16)式を書き直すと、

$$C = \frac{F_{Rn,s,0}}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}} + B \tag{17}$$

が得られる。 (17)式を(15)式に代入すると、

$$F_{Rn,s} = -n_a\sqrt{\frac{D_0^{CO_2}\lambda}{k}}\left[B\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - \exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\right\} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\right]$$

$$\left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{18}$$

が得られ、また、(17)式を(14)式に代入すると、

$$C_{Rn,a} = B\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 2\right\} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 1\right\} + C_{Rn,a,0}$$

$$\left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \tag{19}$$

が得られる。

土壌層と残渣層の境界における ^{222}Rn 濃度の連続性は$z = -L_{CO_2}$において$C_{Rn,a} = C_{Rn,a,r}$を要求する。従って、(9)式及び(19)式から次の関係：

$$A\exp\left(-\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right) + \frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} = B\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\}$$

$$+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\} + C_{Rn,a,0} \tag{20}$$

が得られる。また、この 2 層の境界では、幾何学的面積を横切る ^{222}Rn の流束密度もまた連続であり、$(F_{Rn,s})_{z=-L_{CO_2}} = (F_{Rn,r})_{z=-L_{CO_2}}$ である。このことは次式：

$$A n_{a,r}\sqrt{\frac{D_0^{Rn}}{k_r}}\exp\left(-\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right) = n_a\sqrt{\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\ \left[B\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right]. \tag{21}$$

を導く。(21)式を(20)式と結合すると、

$$\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}$$
$$= B\left[\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}\right] \tag{22}$$

が得られる。従って、(22)式から未知数 B は

$$B = \frac{\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{23}$$

と決定されることが出来る。(20)式及び(23)式から未知数 A は

$$A = \left[\frac{\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\right.$$
$$\times\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\}$$
$$\left. +\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\} + C_{Rn,a,0} - \frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}\right]\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right) \tag{24}$$

と決定されることが出来る。

決定された定数 B を(19)式に代入すると、

$$C_{Rn,a} = \frac{\frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}} F_{Rn,s,0}\left\{\left(1 + \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) + \exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 2\right\} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}} F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right) - 1\right\} + C_{Rn,a,0} \qquad (0 \geq z \geq -L_{CO_2}) \qquad (25)$$

が得られる。また、決定された定数 A を(9)式に代入すると、

$$C_{Rn,a,r} = [\frac{\frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}} F_{Rn,s,0}\left\{\left(1 + \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}} F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 1\right\}$$

$$+ C_{Rn,a,0} - \frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}]\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right) + \frac{\delta_r \varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}} \qquad (-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty) \qquad (26)$$

が得られる。

今、残渣を残渣上にある土壌と同じ土壌に置き換えると、

$$\begin{aligned} \varrho_r &= \varrho, \\ n_{a,r} &= n_a, \\ k_r &= k, \\ \delta_r A_{Ra,r} &= \mathrm{X} = \delta A_{Ra}, \end{aligned} \qquad (27)$$

が得られる。ここで、

δ : 土壌中で平衡状態で生成された ^{222}Rn の量に対して空気で満たされた間隙に逃れ出てきた ^{222}Rn の量の比で定義される土壌の ^{222}Rn escape-to-production ratio

A_{Ra} : 土壌の固体中の ^{226}Ra 濃度(Bq kg^{-1} of dry soil)

である。また、土壌微生物及び植物根はこの置き換えられた土壌には多くないと仮定する。従って、(25)式及び(26)式において、ϱ_r、$n_{a,r}$、k_r及び$\delta_r A_{Ra,r}$をそれぞれϱ、 n_a、k及びδA_{Ra}で置き換えることが出来、それぞれ

$$C_{Rn,a} = \frac{\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\sqrt{\frac{D_0^{CO_2}}{D_0^{Rn}}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\} - \sqrt{\frac{D_0^{CO_2}}{D_0^{Rn}}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)+\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-2\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-1\right\}+C_{Rn,a,0} \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \qquad (28)$$

及び

$$C_{Rn,a} = [\frac{\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\sqrt{\frac{D_0^{CO_2}}{D_0^{Rn}}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\} - \sqrt{\frac{D_0^{CO_2}}{D_0^{Rn}}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}$$

$$+C_{Rn,a,0}-\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}]\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right)+\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} \qquad \left(-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty\right) \qquad (29)$$

が得られる。(28)式及び(29)式を書き直すと、それぞれ

$$C_{Rn,a} = \frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - C_{Rn,a,0}\right) - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)+\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-2\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-1\right\}+C_{Rn,a,0} \qquad \left(0 \geq z \geq -L_{CO_2}\right) \qquad (30)$$

$$< \quad C_{Rn,a} = \frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - \frac{\sqrt{D_0^{Rn}}}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-1\right\} - \sqrt{D_0^{Rn}}C_{Rn,a,0} - \frac{\sqrt{D_0^{CO_2}}}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)+\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-2\right\} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)\right\}}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)+\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-2\right\}$$

$$+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)-1\right\}+C_{Rn,a,0}$$

$(0 \geq z \geq -L)$: Equation (8) in Kataoka and Kigoshi (2014) >

及び

$$C_{Rn,a}=[\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}$$

$$+C_{Rn,a,0}-\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}]\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right)+\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}\qquad(-L_{CO_2}\geq z\geq-\infty)\tag{31}$$

$$< \ C_{Rn,a}=[\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-1\right\}-\sqrt{D_0^{Rn}}C_{Rn,a,0}-\frac{\sqrt{D_0^{CO_2}}}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)+\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)\right\}}\left\{\exp\left(-L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)+\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-2\right\}$$

$$+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}\right)-1\right\}+C_{Rn,a,0}-\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}]\exp\left(L\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right)+\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}\qquad(-L\geq z\geq-\infty):\text{Equation (9) in Kataoka and Kigoshi (2014)} \ >$$

が得られる。(30)式及び(31)式はそれぞれ、Kataoka (2018)の(4)式及び(5)式と同じであり、また、Kataoka and Kigoshi (2014)の(8)式及び(9)式とも同じである。

(30)式及び(31)式を分かり易くするため、以下のことを行いましょう。

(24)式を書き直すと、

$$A=\frac{\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left[\left(\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}-C_{Rn,a,0}\right)\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}\right]\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\tag{32}$$

が得られる。

(16)式及び(23)式から未知数Cは、

$$C=\frac{\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}-C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\tag{33}$$

と決定されることが出来る。

(12)式、(23)式及び(33)式から未知数Dは、

$$D=\frac{-2\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}+\left(1-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\left(C_{Rn,a,0}-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\left(C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{34}$$

と決定されることが出来る。

(23)式、(33)式及び(34)式を(11)式に代入すると、

$$\begin{aligned}C_{Rn,a}=&\frac{\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}-C_{Rn,a,0}-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\\
&+\frac{\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}-C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(1-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-1\right\}}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\\
&+\frac{-2\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}+\left(1-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\left(C_{Rn,a,0}-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\left(1+\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\right)\left(C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\\
&\left(0\geq z\geq -L_{CO_2}\right)\end{aligned} \tag{35}$$

が得られ、また、(32)式を(9)式に代入すると、

$$\begin{aligned}C_{Rn,a,r}=&\frac{\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left[\left(\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}-C_{Rn,a,0}\right)\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}\right]\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)}{\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\frac{n_a}{n_{a,r}}\sqrt{\frac{k_r}{D_0^{Rn}}\frac{D_0^{CO_2}}{k}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\\
&\times\exp\left(\sqrt{\frac{k_r\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right)+\frac{\delta_r\varrho_r A_{Ra,r}}{\lambda n_{a,r}}\qquad\left(-L_{CO_2}\geq z\geq-\infty\right)\end{aligned} \tag{36}$$

が得られる。

(32)式、(23)式、(33)式、(34)式、(35)式及び(36)式において、ϱ_r、$n_{a,r}$、k_r及び$\delta_r A_{Ra,r}$をそれぞれϱ、n_a、k及びδA_{Ra}で置き換え書き直すと、それぞれ

$$A=\frac{\sqrt{D_0^{CO_2}}\left[\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}\right]\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{37}$$

$$B=\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{38}$$

$$C=\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{39}$$

$$D=\frac{-2\sqrt{D_0^{Rn}}\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}+\left(\sqrt{D_0^{Rn}}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0}-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}C_{Rn,a}=&\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\\
&+\frac{\sqrt{D_0^{Rn}}\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}-C_{Rn,a,0}\right)+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\left(\sqrt{D_0^{Rn}}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\sqrt{D_0^{Rn}}\right\}}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}z\right)\\
&+\frac{-2\sqrt{D_0^{Rn}}\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}+\left(\sqrt{D_0^{Rn}}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0}-\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\left(\sqrt{D_0^{Rn}}+\sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0}+\frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)+\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-2\right\}-\sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)-\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}\\
&\left(0\geq z\geq -L_{CO_2}\right)\end{aligned} \tag{41}$$

及び

$$C_{Rn,a} = \frac{\sqrt{D_0^{CO_2}}\left[\left(\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - C_{Rn,a,0}\right)\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\}\right]\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}}$$

$$\times \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{Rn}}}z\right) + \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} \qquad (-L_{CO_2} \geq z \geq -\infty) \tag{42}$$

が得られる。

最後に、(41)式(即ち(30)式)及び(42)式(即ち(31)式)がそれぞれ Kataoka and Kigoshi (2014)の(5)式及び(6)式(微分方程式) (附録参照)の定常状態の解に等しいことを述べる。このことが成立する為には、D((40)式)が$\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a}$に等しくなければならない。従って、

$$\frac{-2\sqrt{D_0^{Rn}}\frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} + \left(\sqrt{D_0^{Rn}} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \left(\sqrt{D_0^{Rn}} + \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} = \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} \tag{43}$$

である。(43)式を書き直すと、

$$\frac{\left(\sqrt{D_0^{Rn}} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} - \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \left(\sqrt{D_0^{Rn}} + \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} - \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)}{\sqrt{D_0^{Rn}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - 2\right\} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) - \exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right)\right\}} = 0 \tag{44}$$

が得られる。Kataoka and Kigoshi (2014)の(5)式及び(6)式を定常状態で解いた場合、$z = -L_{CO_2}$で ^{222}Rn 濃度及び ^{222}Rn の流束密度が共に連続である為の条件は、

$$\left(\sqrt{D_0^{Rn}} - \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} - \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} - \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(-\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) + \left(\sqrt{D_0^{Rn}} + \sqrt{D_0^{CO_2}}\right)\left(C_{Rn,a,0} - \frac{\delta\varrho A_{Ra}}{\lambda n_a} + \frac{1}{n_a}\sqrt{\frac{k}{D_0^{CO_2}\lambda}}F_{Rn,s,0}\right)\exp\left(\sqrt{\frac{k\lambda}{D_0^{CO_2}}}L_{CO_2}\right) = 0 \tag{45}$$

で与えられる。このことは、(44)式が成立し、それ故(41)式(即ち(30)式)及び(42)式(即ち(31)式)がそれぞれ Kataoka and Kigoshi (2014)の(5)式及び(6)式の定常状態の解になることを示している。

References

Kataoka, T., and K. Kigoshi, A study of behavior of radon 222 and carbon dioxide (CO_2) in soil air, in *Abstract Book of the Fourth European IRPA Congress (IRPA Europe 2014) (Updated version 13.10.2014)*, pp. 140 – 143, Geneva, Switzerland, 2014.

Kataoka, T., A study of behavior of radon 222 and carbon dioxide (CO_2) in soil air (II), in *Proc. the Fifth European IRPA Congress (IRPA Europe 2018), Ver. 2,* edited by R. Smetsers, pp. 201 –208, The Hague, The Netherlands, 2019.

附　録

Kataoka and Kigoshi (2014)の(5)式及び(6)式は、それぞれ

$$\frac{\partial(n_a C_{Rn,a})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{D_0^{CO_2}}{k}\frac{\partial(n_a C_{Rn,a})}{\partial z}\right\} - \lambda(n_a C_{Rn,a}) + \delta\varrho A_{Ra} \qquad (0 \geq z \geq -L) \qquad (A-1)$$

及び

$$\frac{\partial(n_a C_{Rn,a})}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{D_0^{Rn}}{k}\frac{\partial(n_a C_{Rn,a})}{\partial z}\right\} - \lambda(n_a C_{Rn,a}) + \delta\varrho A_{Ra} \qquad (-L \geq z \geq -\infty) \qquad (A-2)$$

であり、n_a、k、δ、ϱ 及びA_{Ra}は地下で一定であると仮定している。L (この寄稿ではL_{CO_2}) は深さ(positive)であり、この深さまで土壌微生物及び植物根が密に存在している。